ドレミの科学　(AV 附録つき)

小方　厚

1.　はじめに

音楽は絵画より不自由である．絵画ではどんな色でも使えるのに，音楽では決められた音しか使えない．なぜなのだろうか？

自然界に目を，いや，耳を傾けてみると，イルカはサイレンのように連続的に音高（音の高さ）を上下させて意志を疎通させているらしい．鳥の声もカエルの歌もドレミファ・・・ に則ってはいない．カッコーはカッコーワルツのようには鳴いていない．一方、われわれ人間は連続した音の中から特定の音高の音を選び出して音楽で使っている。われわれが音楽で使う音は，ドレミファなどと不連続にディジタル化されているのである．

ギリシャ時代のピタゴラス音律と古代中国の三分損益音律がドレミファ・・・ の源である．ギリシャと中国の間に交流があったかどうか定かではないが，同じ音律（音高の相対的関係を示す体系）がどちらでも受け入れられたことは確かである．ドレミファ・・・ は世界共通の、いわばユニバーサルな音律なのだ．

ドレミファは西洋音楽におけるディジタル化だが，西洋音楽でない音楽にもその音楽に固有のディジタル化がある．なぜわれわれ人間は音高をディジタル化させるのか，これは難しい問題である．しかし，「なぜドレミファ・・・ という特定の音列にディジタル化されたのか」という，具体的な質問に対してなら，ある程度答えを推測することができる．

著者個人として，音楽の授業で気にかかったのが，ドレミファ・・・の不規則性だ．楽譜ではドレミファ・・・の，隣り合う音と音の間隔は等間隔のように見えるくせに，ミとファ，シとドの間には半音がない．「和音」で三度などという定義も変だ．全音ふたつが長三度で，全音ひとつと半音ひとつが短三度だという．間隔で定義するのだから，長三度の代わりに2 度，短三度の代わりに1.5度といったらよかろう，と思う．

ここでは上記のような疑問への答えを探しながらドレミについて科学的に考察してみる．

2012年3月13日　ＴＳＳ文化大学で講演する著者

2. 音色と周波数スペクトル

同じ演奏者が同じ曲を異なるピアノで弾くと音色が微妙に異なる。また、同じピアノで同じ曲を弾く場合でも演奏者によって音色が異なる。どうしてこのようなことが起こるのであろうか？この違いの原因を知るには、音の物理的性質を理解する必要がある。

物理現象としての「音」は空気の振動である．空気の振動が鼓膜を振動させ，われわれは音を聞く．振動の回数が多ければ音は高く，少なければ音は低い．音の高低は一定の時間に何回振動するかで表すことができる．1 秒間の振動数を「周波数」といい，ヘルツ（Hz）を単位とする．時報のピッ・ピッ・ピッ，ポーンの，最初の低音「ピッ」が 440Hz，最後の高音「ポーン」が 880Hz である．

図1(a) に示した音叉(おんさ) は単一の周波数で振動する．(b) は音叉の先端の位置のずれの時間変化を表した例であって，正弦波である．図では 10ms（ms すなわちミリ秒は 1/1000 秒）に約 4 回の振動，1 秒間では約 $4/(10\mathrm{x}10^{-3}\mathrm{s}) = 400$ 回の振動が数えられるので，周波数は 400Hz=0.4kHz である．横軸に周波数，縦軸に振動の大きさ(振幅) をとったグラフを周波数スペクトルという．図1(c) のように，この音叉から出る音の周波数スペクトルは 0.4kHz だけに鋭いピークがあり，あとは平坦である．

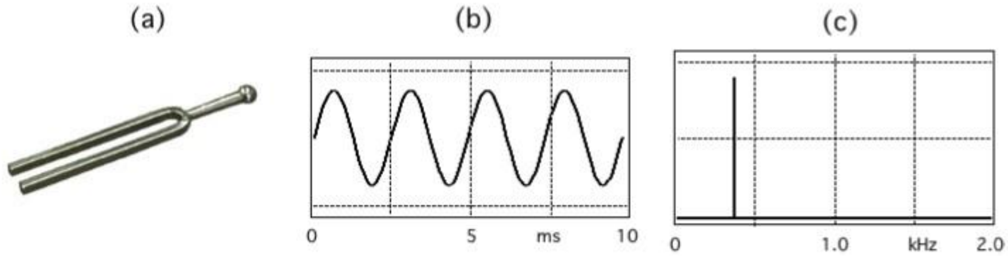

図1: 音叉(a)，その振動波形(b) と周波数スペクトル(c)．

実際の楽器から出る音は音叉の音とはだいぶ違う．図2 はグランドピアノの C 音の時間変化(上)と周波数スペクトル(下) である．

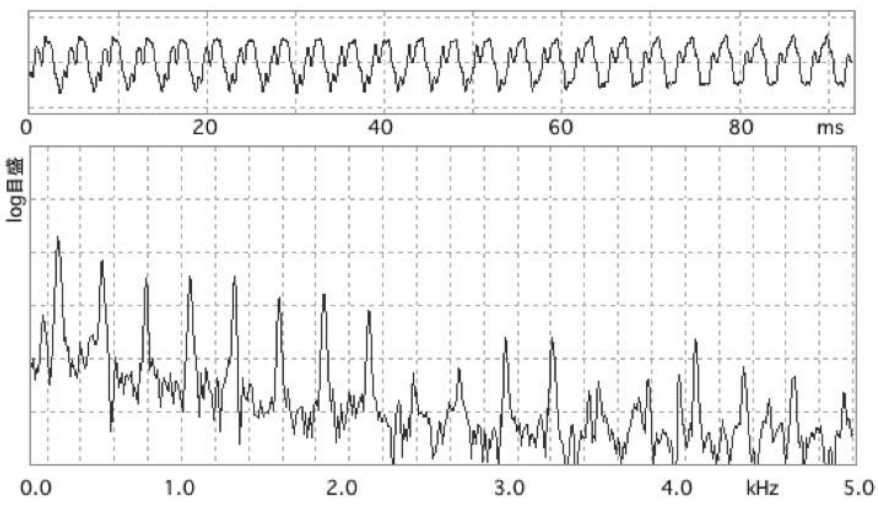

図2: ピアノの波形(上) と周波数スペクトル(下)．

上の波形をおおまかに見れば，約 95ms に約 24 の周期がある．こう考えると周波数は $f_0 = 24/(95 \times 10^{-3}\mathrm{s})$ = 0.25kHz である(厳密には 0.261kHz)．じっさい周波数スペクトルに現れているたくさんのピークのうち，一番高いのは左端のもので，横軸を見ると 0.25kHz あたりである．しかし波形はなめらかな正弦波ではない．じつは波形の正弦波からのずれが楽器の「音色」を決めている．グランドピアノにも，スタィンウェイだのベーゼンドファーだのヤマハだのがあって，それぞれ固有の波形を持っている．

波形は周波数スペクトルと対応する．スペクトルには左端の最大ピークの他に，いくつものピークがある．左から 2 番目のピークは 0.522kHz，3 番目は 0.783kHz・・・ という具合で，高さは不規則だが，ピークとピークの間隔を計ってみると正確に 0.261kHz である．0.522kHz のピークは基本波の 2 倍波，0.783kHz のピークは 3 倍波である．これらの波形の倍数波に，ピークの高さに比例した係数を掛けて足し合わせると，もとのピアノの波形を再現できる．

なお図 2(上) の図の個々の周期をよく見ると，左から時間が経って右に移るにつれて徐々に波形が変わっている．ピアノのキーを押した瞬間から徐々に音色が変わっているのである．この波形の時間依存性は，いつキーを離すかによっても変わる．こうしたことが積み重なって，ピアニスト一人ひとりの「音色」が生まれるのであろう．波形が時間とともに変わるので，スペクトルも時間とともに変わる．図 2(下) のスペクトルは上に示した時間だけスペクトルを平均した結果のようなものと理解していただきたい．

肝心なことは，

1. 周波数 f_0 は音の高さに対応する．C・D・E・・・ あるいはド・レ・ミ・・・というコトバで音の高さを表すが，これらは周波数と 1 対1 に対応し，平均律で C を 261Hz とすれば D・E はそれぞれ 293Hz・329Hz などとなる(実は A の周波数 440Hz が楽音の高さの基準である)．
2. われわれは楽器で基本波を発生したつもりでいるが，西洋音楽で用いられる楽器では，ピアノに限らずどの楽器でも，多かれ少なかれ 2 倍波・3 倍波・4 倍波・・・ に対応した音も鳴らしている．

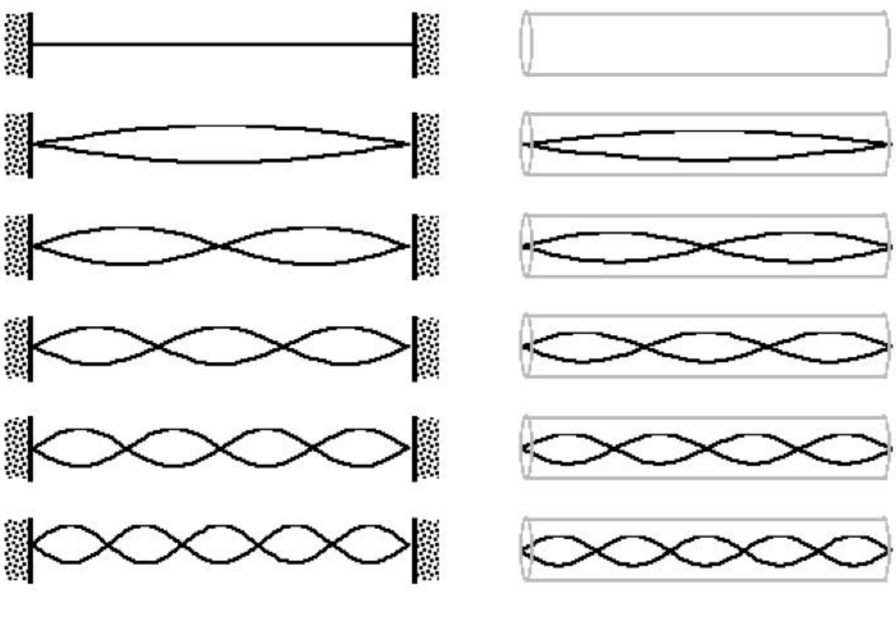

図3：両端を固定した弦の振動(左) と，両端を閉じた管のなかの空気の振動(右)．

なぜ倍数波が発生するのか? メロディ楽器の代表は管楽器と弦楽器であろう．音は空気の振動だが，その源は，弦楽器では弦そのものの振動，管楽器では管に閉じ込められた空気の振動である．

図 3 の左は両端を固定した弦の振動，右は両端を閉じた管のなかの空気の振動である．どれだけの長さの弦あるいは管が振動するかで音の高さが決まる．弦あるいは管は長いほど低い音が出る．また図の場合は，弦にせよ管にせよ，両端の固定された部分は動きようがないので，振動できる最大長は弦あるいは管の長さそのもので，次は半分の長さ．次は 1/3 長などとなる．周波数は長さに反比例する．したがってこうした弦あるいは管からは最低周波数 f_0 の倍波 $2f_0$，3 倍波 $3f_0$，4 倍波 $4f_0$ などが出てくる．ピアノはピアノ線という弦を振動させて音を出す楽器であるから，図 3 の左の図をそのままあてはめることができる．

3. 音名と音階

音楽で使う音名と階名についてまとめておこう．図 4 はハ長調のドレミファ・・・ である．一番低い音に「ド」，そこから高い方向へ「レ」「ミ」・・・ と，音の「高さ」に対して名前が付いている．図にはドレミ・・・の下に CDE・・・と書いてある．ハ長調の「ド」のことをC，ハ長調の「レ」のことを D などと言うからである．さらに，ハ長調の「ド」のことを「ハ」，ハ長調の「レ」のことを「ニ」と言うように，ハニホ・・・という名付け法もある．最後に「いち・に・さん・・・」という名付け法もあるのだが，こちらはローマ数字を使うのが慣例である．どうしてこんなにも名付け法があるのかと思うが，仕方がない．もともとドではなくラが基準であり．そこから ABC・・・ と数えたのを，日本でイロハ・・・と翻訳した?と考えれば，2 段目と 3 段目は統一して考えることができる．

ド	レ	ミ	ファ	ソ	ラ	シ	ド	階名または音名
C	D	E	F	G	A	B	C	音名
ハ	ニ	ホ	ヘ	ト	イ	ロ	ハ	音名
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	階名

図4: 音名と階名．

図 5 はヘ長調の音階である．まず 3 段目と4 段目をみると，音の「高さ」の呼び方は図 4 と同じなのが分かる．すなわち五線譜の一番下の線があらわす高さの音は，何長調であれ何短調であれ「E」あるいは「ホ」という名前を持っている．同様に五線譜の一番下の線と二番目の線の線間があらわす高さの音は，何長調であれ何短調であれ「F」あるいは「ヘ」という名前を持っているのだ．B の後ろにフラット記号♭が付いているが，これはご存じのように半音下げることを意味する．この和訳がロの前の「変」である．半音上げる場合は # と「嬰」となる．

3 段目・4 段目から類推すると，五線譜の一番下の線があらわす高さの音を数字で言えば常に「III」のはずだが，図5 では「I」である．これは転調して，「F」あるいは「ヘ」音が根音となったためである．ヘ長調，英語流に言うと「キーが F」のときは F，すなわち，ヘ音を I とする．そして I,II,III,・・・ の数字は根音(主音) から何番目かを表す．こうした目で図 4 をもう一度眺めると，ハ長調，英語流に言うと「キーが C」のときは C すなわちハ音を I とし I,II,III,・・・によって根音から何番目の音かを表していることがわかる．

ド	レ	ミ	ファ♭	ソ	ラ	シ	ド	移動ド式
ファ	ソ	ラ	シ	ド	レ	ミ	ファ	固定ド式
F	G	A	B♭	C	D	E	F	音名
ヘ	ト	イ	変ロ	ハ	ニ	ホ	ヘ	音名
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	階名

図5: 音名と階名，ヘ長調の場合.

まとめれば，CDE・・・とハニホ・・・ は「音名」すなわち絶対的な音の高さにつけられた名前であるのに対し，I,II,III,・・・は根音から数えて何番目かという相対的な位置をあらわすものである．後者は「音階」と一対一に対応しているので「階名」という．

さて，始末に悪いのが「ドレミファ」であって，これを音名として使う流派と階名として使う流派がある．それぞれ「固定ド派」「移動ド派」という．本稿ではドレミ・・・ はまぎらわしいので副次的な使用にとどめるつもりである．

4. 快い響きと不快な響き

4.1 快い響き: 協和音

楽曲では C(ド) と G(ソ)， F(ファ) と C(ド) などの 2 音はしばしば重ねて使われる．これに対して C(ド) とD(レ) など，近接した 2 音はあまり重ねて使われない．G(ソ) はC(ド) に対して3/2倍の周波数を持つ．C(ド) はまたすぐ下の F(ファ) に対して 3/2 倍の周波数を持っている．このように単純な周波数比を持つ 2 音は，一緒に鳴らしたときの響きが良い．

図 6 を用いてその理由を考えよう．図の 2 本の直線の横軸は周波数である．図 2 に示したように，楽器で C という音を出したとすれば，音量に差はあるとしても，C(ド) の周波数の 2 倍，3 倍，4 倍，5 倍，・・・の周波数を持つ音が同じ楽器から発生する．

このとき G(ソ) もいっしょに鳴らしたとしよう．その周波数は下の直線の左の方，C の 3/2 倍の位置で表せる．この G の周波数の 2 倍，3 倍，4 倍，5 倍，・・・ の周波数を持つ音が同じ楽器から発生するのだが，もともと G の周波数は C の3/2 であった．C の周波数を基準すなわち 1 とすれば，G を鳴らしたときに

出る音の周波数は，3/2=1.5，6/2=3，9/2=4.5，12/2=6，・・・ 等となる．図のように 3，6，9 等は C の倍音と一致する．このように共通の倍音を持つ2 音が同時に鳴るとわれわれは 2 音が「協和する」と感じる．

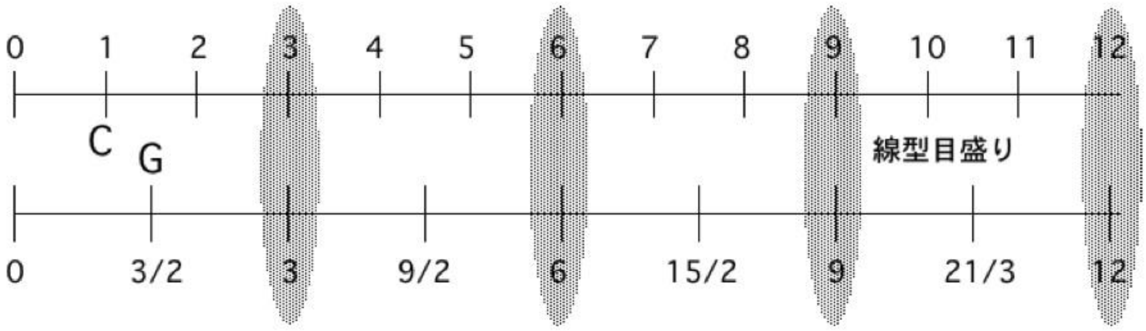

図6：C とG を同時に鳴らしたときの倍音の一致．

4.2　不快な響き：不協和音

だれにでも受け入れられる前提は，高さが近い，すなわち周波数が近い二音を重ねて鳴らすと不快だと言うことである．ふたつの純音（正弦波）の不協和度 F は図 7 に示すように，周波数差 Δf に依存する．

ふたつの純音の周波数を f_1, f_2 とする．最初はふたつの周波数を等しく，すなわち $f_1 = f_2$ としておき，f_2 を徐々に大きくしていくとしよう．周波数差 $f_2 - f_1 = \Delta f$ が小さいうちはひとつの純音にきこえるが， 次第に音程が上がって，$f_1 + \Delta f/2$ という純音が，Δf という唸り（うなり，英語ではビート）を伴って聞こえるようになる．Δf をさらに増加させると，われわれには二つの音程の異なる2 音が認知できるようになる．唸りを伴う 1 音認知と 2 音認知との境界の周波数差を臨界帯域幅といい，ここでは Δf_c で表すことにする．臨界帯域幅は音の高さによるのだが，ここでは詳細は省略する．図の横軸は $\Delta f/\Delta f_c$ である．

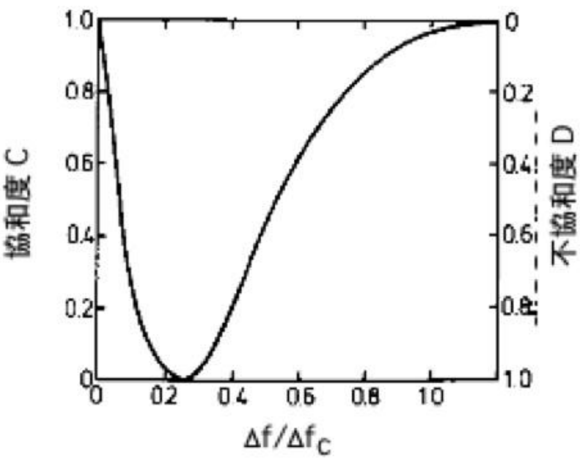

図7：2 音を同時に聞いたときの協和度C と不協和度D の，$\Delta f/\Delta f_c$依存性．

Δf が非常に小さいか，あるいは臨界帯域幅 Δf_c 以上で２音が相互に干渉しない程度に大きい時は，２音をいっしょに鳴らしても不快感すなわち不協和感はない．このとき不協和度 $D = 0$ である．この不協和度ゼロ

の状態を協和度 1 あるいは $C = 1$ とする．周波数差が臨界帯域幅より小さくなると、聴いたときに不協和度が生じる．音楽の専門家でない多数の被験者を対象に，この不協和度が周波数差とどのように関連するかを調査し，グラフに示した結果が 図7 である．不協和度が最大になるのは（$D=1$ となるのは）周波数差が臨界帯域幅の約 1/4 のとき，すなわち $\Delta f/\Delta f_c \sim 1/4$ のときである．

なお，ここでいう「協和」は不快感を与えないという消極的な意味である．「協和音」というと一般には「聴いて心地良い」と言う積極的な意味で用いるので，注意が必要である．また図のように $C + D = 1$ である．

4.3　楽音の協和・不協和

図 7 は音叉のように単一周波数を出す 2 音の不協和度が，2 音の $\Delta f/\Delta f_c$ によってどう変わるかを示したものであった．音叉の周波数スペクトルは図 1(c) に示したように，太さのない線スペクトルである．しかし管楽器・弦楽器の音は図 3 に示すように 2 倍波・3 倍波・4 倍波・... を持ち，そのスペクトルは図 2 のようにほぼ等間隔で並んだ沢山のピークを持っている．このような楽音で，不協和度を $\Delta f/\Delta f_c$ を横軸に描いたらどのようなグラフになるであろうか.

Δf_c をある値に決めたときの計算結果を図 8 に示す．ここでは横軸を f_2/f_1 としてある．グラフの谷間では 2 音の協和度が大きい．左から 6/5, 5/4, 4/3, 3/2, 5/3 など，2 音が単純な周波数比をなすとき，2 音は協和することが分かる．右はしの周波数比 2/1 はオクターブ離れた 2音であって，このときの協和度は同一音をならしたとき，すなわちユニゾンと変わらない.

5. われわれの聴覚は対数感覚

われわれの感覚はしばしば数量を「比」として認識する. 例えば, カレーに香辛料をひとさじ入れた時と 2 さじ入れた時には明らかに差がわかる．ところが，10 さじと 11 さじでは差がわからない．10 さじ入っているところに，さらに香辛料を加えて(1 さじと2 さじが違う程度に)辛くなったと認識させるには，もう 10 さじ入れて合計 20 さじとする必要があるという. 嗅覚も同様で匂い物質の濃度が 10 倍になって漸く 2 倍の強さの匂いとして感じる。

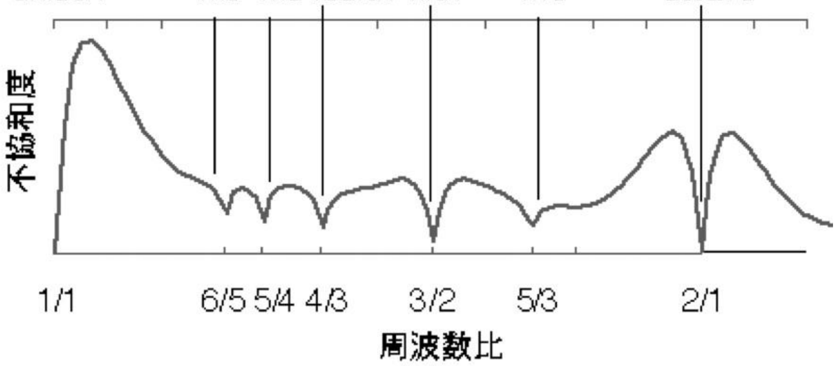

図8: 二つの楽音を同時に聞いた時の不協和度D の，2 音の相対周波数差への依存性.

われわれの音に対する感覚には，音量すなわち音が大きいか小さいか，と，音高あるいは音程，すなわち音が高いか低いかがある．どちらの感覚も「対数的」である．高さでは，周波数が 2 倍になる音高差が 1 オクターブである．ドを 261 Hz とすれば，上のドはその倍の 523 Hz，さらにその上のドはもとの 4 倍の 1046Hz である．三つのドの音の差は等しいように感じられるが，実は比が等しいのである．

われわれが聞き取れる音は、20Hz から 20,000Hz の間で，これを可聴領域という．すごく広い範囲のように聞こえるが，11 オクターブほどである．可聴領域の中でも，人間の耳が聞きとりやすい，感度のいい周波数帯は、2,000-4,000Hz の周波数帯で，赤ちゃんの泣き声や女性の悲鳴などはこのあたりにある．音楽で使われるのはこれより低い音である．やや低い周波数帯の方が安らぎを感じることができるらしい．

6. 音律

現在学校で教えられている音楽は12 音平均律に基づいている．まず「平均律」を説明し，次になぜ12 音かを考えたい．音楽では，使える音の高さが指定されている．音の高さはすなわち周波数はアナログ量(連続量）だが，これをディジタル化(離散化）して使っているのだ．この離散化の指定法が「音律」である．音律には平均律，ピタゴラス律，純正律などがある．

6.1 平均律

ある音律が用いる一連の音の周波数は数列を作る．平均律ではある音の周波数にある定まった数 a を掛けた周波数を持つ音を数列に加える．この操作を，はじめの周波数の 2 倍の周波数が現れるまでおこなう．何回か掛け算を繰り返せばちょうど 2 倍が現れるように a を選んでおくと言ってもよい．周波数が 2 倍まで音高が上がることを「オクターブ上がる」という．

はじめの音の周波数をf_0，音律の 2 番目，3 番目・・・ の音の周波数を f_1，f_2,・・・ などとすれば，

$$f_1 = af_0,\ f_2 = a^2 f_0,\ f_3 = a^3 f_0,\ \cdots$$

等である．n 回この操作を繰り返したら，オクターブ上の音，すなわち$2f_0$ の周波数を持つ音になるとすれば，a は方程式

$$2f_0 = a^n f_0,$$

すなわち $2 = a^n$ の根であって，a は 2 の n 乗根ということになる．12 音平均律では，a は 2 の12 乗根 =1.05946・・・と言うことになる．

では a を 2 の12 乗根とする必然性は何か．

6.2 ピタゴラス音律

オクターブ離れた，すなわち周波数比が 1 対 2 の関係にある二つの音はたいていの人が声に出して歌うことができる．このオクターブは，2 音の関係のうち最も単純なものである．つぎに単純な関係は周波数比が 1 対 3 の関係にある 2 音であろう．周波数を 3 倍にするごとに現れる音列に基づいて音律を作ったのがピタゴラスであった(と伝えられている)．あの，直角三角形の三平方の定理のピタゴラスである．そして，ピタゴラスの音律は現在の 12 音平均律に極めて近い．

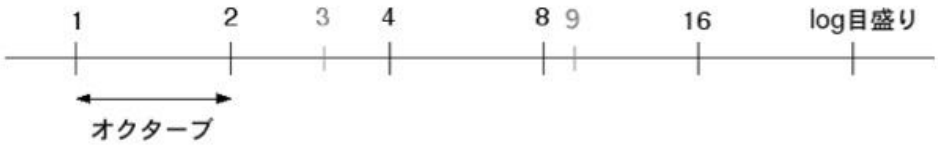

図9：対数目盛による周波数の数直線.

図 9 は数直線で，左から右に行くほど周波数が高くなる．ここでは 1 から 2 までの距離と，2 から 4 までの距離が等しい．2.5 から 5 までの距離，10 から 20 までの距離も同じである．また，1 から 3 までの距離は(1 から2 までの距離より長いのは当然だが)，3 から 9 までの距離と等しい．要するに，二つの数の比が二つの数の間の距離を決めている．この目盛りを「対数目盛」という（これに対して普通の物差しの目盛りは「線型目盛」という)．繰り返しになるが，聴くことに関しては，われわれ人間の感覚は対数目盛で計った方がよい．ドとレ，レとミの音の高さの差すなわち音高の間隔は等しいように感じられるが，実はド対レ，レ対ミの周波数の比が等しいのである．

さて，図 9 の数直線には基準点，その2 倍,4 倍,8 倍・・・ のところに 1,2,4,8,・・・と目盛りが打ってある．ついでに 3 倍，9 倍のところにも目盛りを打った．基準点が「ド」を表すとすれば，このドの 2 倍，4 倍・・・ の周波数を持つ音は 1 オクターブ，2 オクターブ・・・上の「ド」である．では 3 倍の周波数を持つ音はなんだろうか？ 実はこの音につけられた名前が「ソ」である．基準音のオクターブ上のドから，ドレミファと数えていった先の「ソ」である．

この数直線を図 10 のようにバネ状に巻くと想像していただきたい．バネの直径は，一回りするごとに 2, 4,8,・・・ の点列が同じ場所に来るように決める．次に，このバネに上から光を当てるとしよう．床にできるバネの影は円になり，「ド」の点は何オクターブ離れていても円周上の同じ点に来るであろう．

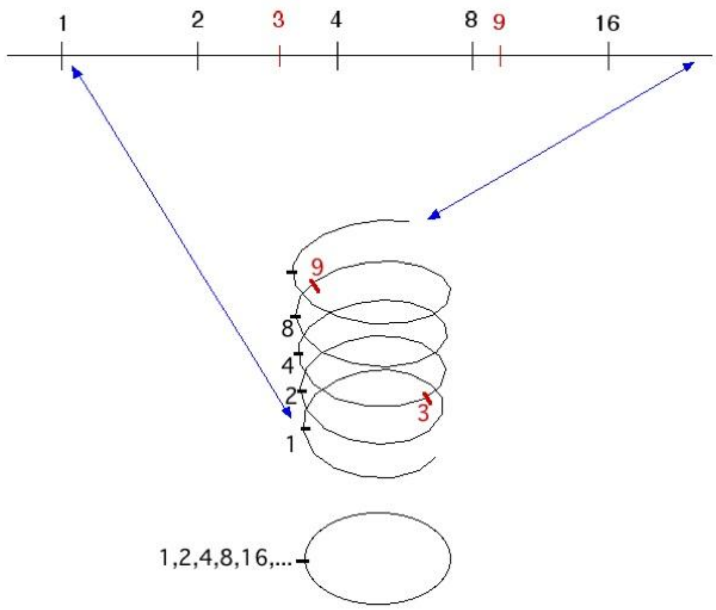

図10：周波数の数直線からバネを巻いて投影すれば・・・

では 3 という点は図11(a) の円ではどこに来るであろうか? 360度 を log 3/log 2=1.5489・・で比例配分すると 570.58度 となるのだが, これから一周分 360度 を差し引くと, 210.58・・・ 度 である. これを 210 度 = 7x30度 と近似する. 図 11(a) は投影された円をもう一度書き直したもので, 図 11(a)で 1,2,4,8,・・・を12 時の位置とすれば,3 は 7 時の位置にくる. これをもう一度 3 倍すると 9 だが, これは 3 時から 7 時間すすんだ位置, すなわち 2 時の位置に来る.

時計の文字盤には 1 から12 までの数字があるが, 12, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 のかわりに C, C#, D, D#, E, F,F #, G, G#, A#, B という文字をふることにする. これを図 11(b) の円の内側に書き込んだ.

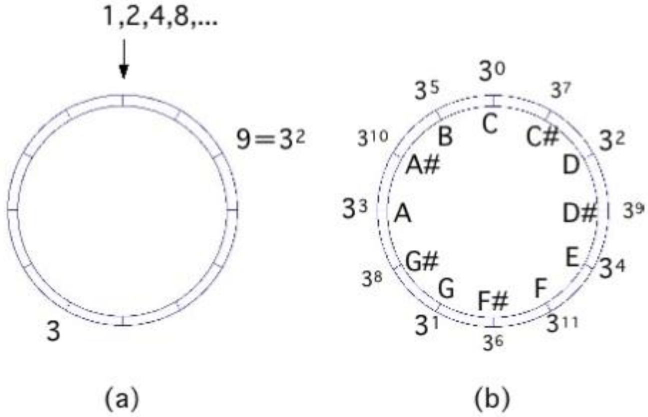

図11: 時計の文字盤に対応する12 音.

図の外側には 1.3,9,・・・ という一連の数列の要素を 3 の何乗という形で書き込んだ. この何乗の「何」を小さい方から拾ってみよう. すると 3 の 0 乗, 1 乗, 2 乗, 3 乗, 4 乗は CGDAE あるいはドソレラミである. これらを音名あるいは階名とみなして, 低い方から並べ直すと, 「ドレミソラ」となる. この音階はヨナ抜き音階と呼ばれる. つぎに 0 乗, 1 乗, 2 乗, 3 乗, 4 乗の前後に -1 乗と5 乗を加えてみよう. マイナス 1 乗なんかないのだが, 最後に現れた 3 の 11 乗を -1 乗とみなす. すると英字列は FCGDAEB, 階名に直してドを先頭に並べ替えると「ドレミファソラシ」となる. ここに述べた手順で現れた「ドレミファソラシ」はピアノの白鍵に対応する. さらに同じ手順を続けると, 3 の 6 乗から3 の 10 乗までの五つの音, ピアノでは黒鍵が割り振られている 5 音が現れる.

図12: ピアノの白鍵.

表1 はピタゴラス音律がつくる長音階（CDEF・・・ あるいはドレミファ・・・）の各構成音の根音 C に対する周波数比である.

C	D	E	F	G	A	B	(C)
1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128	2

表1: ピタゴラス音律の長音階における，構成音の根音に対する周波数.

ここまでの記述について，次の疑問を持たれた方がおられるであろう.

1. 円が閉じるためには，3 の 12 乗は2 の何乗かに一致しなければならない. 2 も 3 も素数だから，そんなことはあり得ないのではないか?
2. 図 10 のバネを眺めていればわかることだが，ドレミファ・・・と言ったところで，ソはドの 1 オクターブ上から数え初めてのソ，レはもっと上だからソはレより低音，他のミ，ファ，ラ・・・は凄い高音. 要するに，このドレミファ・・・はドとドの間のオクターブに詰まってはいないではないか!

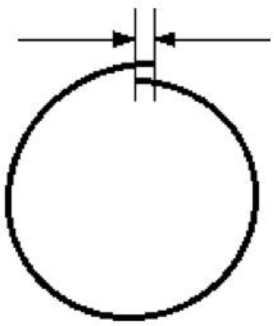

図13: ピタゴラスのコンマ.

1）については確かに，3 の 12 乗は 531441 これに一番近いのは 2 の19 乗で 524288 である. この二つの数は一致していない. すなわち，円は閉じない. (3 の12 乗)/(2 の19 乗)=1.01364 であって，周波数比で 1 パーセント強のずれがある. 図13 に示したこのずれを「ピタゴラスのコンマ」という.

2）について，ここではオクターブの間隔をもつ音はみな同じ音とみなしている. あるいは，3 の何乗かして得られた数を，2 の何乗かで割って，とにかく最初のドとそのオクターブ上のドの，二つの周波数の間に入るように調整したと言っても良い. 乱暴な話である. しかし人間の耳には，オクターブ離れた音は似たようなものに聞こえるようだ.

音の低い方から順に並べると図11 のようになるが，先ほどのように周波数を 3 倍にするという手順によれば，C の次に現れるのは G である. 図 12 のピアノの鍵盤で C すなわち（ハ長調のド）を 1 として，白鍵だけを高い方に数えていくと，D は 2，E は 3，F は 4，そしてG は 5 である. このように 3 倍音は5 番目の音として現れる. 5 番目の音を和声学では「もとの音と 5 度の関係にある音」，「 5 度上の音」等という.

つぎに G を1 としてあらためて右に数えていくと GABCD が 12345 に対応し，D が 5 となる．D は G の5度上の音である．

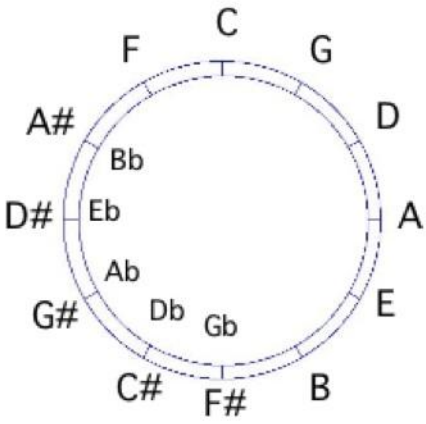

図14： 五度円．

「周波数を 3 倍する」という手順で現れる 12 の音を,現れる順番に円周上に並べた結果が図 14 であって，中央上の C から始めるとすれば，2 番目が G，3 番目が D となっている．図 14 では隣どうしの音程が 5 度なので，これを五度円あるいは五度圏という．

ピアノの鍵盤を眺めればわかるように，ある白鍵の音 X の半音上の音と，X の右隣の白鍵 Y（2度上の音と言う方が正確）の半音下の音とは同じである．言い換えれば X# と Y♭は同じ音を指す，あるいは X# は Y♭という別名を持つ．図14 の円の内側にはこの別名を書いておいた．ただし，図10 のやり方，すなわちピタゴラスのやり方で，バネを上に伸ばして行ってできる音と，下に伸ばして行ったときにできる音は，コンマが存在するので，同じではない．図 14 で，G♭ とF#，D♭ とC#，A♭ とG#，E♭ とD#，B♭ とA#，は異名異音である．平均律ではこれらは異名同音となる．そして，現代のピアノは平均律である．

6.3 純正律

ピタゴラス音律は 3 倍音という系列の音を操作し，CDEFGABC という，ピアノの白鍵に対応する音階，すなわち長音階を生み出した．実はこの音階では C とE，すなわちドとミの響きが今ひとつ美しくない．3 倍音だけでなく，5 倍音系列に属する音も使って，ピタゴラスの長音階の一部の音を置き換えるとこの問題が解決する．

	C		D		E		F		G		A		B		(C)
ピタゴラス音律	1		9/8		81/64		4/3		3/2		27/16		243/128		2
		9/8		9/8		256/243		9/8		9/8		9/8		256/243	
純正律	1		9/8		5/4		4/3		3/2		5/3		15/8		2
		9/8		10/9		16/15		9/8		10/9		9/8		16/15	

表2： ピタゴラス音律と純正律の長音階における構成音の根音に対する周波数比と隣り合う 2 音の周波数比．

表 2 にはピタゴラス音律と純正律の長音階について，それぞれ構成音の根音に対する周波数比と，隣り合う 2 音の周波数比を示した. 「ここちよい響きと不快な響き」の章での示したように，2 音の周波数比が単純なほど 2 音の響きが良いという法則がある. 最も響きが良いのは同じ 2 音，次がオクターブ離れた 2 音，3 位は C(ド) と G(ソ) すなわち 3/2 の関係にある2 音である(ちなみに F(ファ) から高い C(ド) をみると，周波数は 3/2 倍である). C(ド) と E(ミ) の周波数比はピタゴラス音律では 256/243 倍だったものが，純正律では 5/4 倍とぐっと簡単になり，響きも良くなっている. 図 8 の谷の周波数比と表 2 を比べると，純正律は心理テストが心地よいとする周波数比はすべてその音律に取り入れていることが分かる.

ただしピタゴラス音律では隣り合う 2 音間の周波数比は 9/8 と 256/243 の 2 種類しかなかったのに対し，純正律では 9/8, 9/10, 16/15 の三種類になってしまう. ピタゴラス音律と五度円との美しい対応は，純正律では失われる.

6.4 転調，そして平均律へ

ピタゴラス音律では DA(ハ長調ではラ) 間の周波数比は CG(ド・ソ) 間とぴったり同じで 3/2 であった. しかし純正律では DA 間の比は 40/27=1.481・・・ にずれている. この 2 音の響きを，オオカミのうなり声になぞらえて「ウルフ」という. これがいろいろな問題を生じる. まずレファラ (DFA すなわちDm) という和音の響きが悪い.

長調から短調へという「転調」にはしばしばお目に(お耳に?) かかる. 城ヶ島の雨，青い目の人形，比較的新しいところでは，ピンクレディのウォンテッドなど. ここでハ長調からイ短調への転調を例にとると，イ短調の主要 3 和音の中にはレ・ファ・ラがふくまれる. 従って純正律ではこのありふれた転調ができない. ややマニアックな話題だが，ジャズでは II-V-I というコード進行が一般的である. これはハ長調では「レファラ→ソシレファ→ドミソ」というパターンである. このコード進行も純正律では禁じ手である.

純正律でできない転調が，ピタゴラス音律ならできるという訳ではない. ピタゴラス音律には図 13 に示した「ピタゴラスのコンマ」が存在する. そのピタゴラス音律は 1 オクターブの中に図 14 に示した 12 の音が現れるのだが，12 の音の間隔は 2 種類あり，おまけに「コンマ」のために，13 番目でちょっきりオクターブ上がるわけではない. ピタゴラス音律でも転調はできない.

ウルフ問題と，これから派生する転調問題を解決する方法が，ミーントーン，ウェル・テンペラメント等，歴史的にはたくさん試みられたのだ. しかし本稿ではこれらはすべて割愛して最初の平均律に戻ることにする. 要するに，オクターブを(対数的に)12 等分して，半音を 1 単位，全音を 2 単位とし，全音は半音のちょっきり 2 倍としたのが 12 音平均律である.

この 12 音平均律では，1.5 であるべき CE 間の周波数比が 1.4983・・となってしまう. 平均律は響きを犠牲にして転調という効率を重視したものであるといっていい. もう一度図 8 に戻っていただきたい. この横軸は，実は対数目盛であった. そして図の上の目盛は等間隔で 1/1 と1/2 の間を12 等分している. これは，オクターブを(対数的に)12 等分した平均律である. ここには英語で m3, M3, ・・・ の書き込みがあるが，これはふたつの協和する2 音の対に対する名前であって，日本語では短 3 度，長３度，完全 4 度(Fourth)，完全 5 度 (fifth)，長 6 度 (M6) である. 図で分かるように，平均律の区切りは不協和度の谷間と微妙にず

れている．この結果和音の響きも純正律に比べると良くない．これを許容するかしないかは大きな問題だが，大部分の現代人は平均律に慣れている．言い方を換えれば，スポイルされている．

平均律が普及したのは 20 世紀に入ってから，作曲家で言えばドヒュッシー以降の世代である．バッハもモーツアルトもベートーベンも平均律とは無縁であったようだ．ちなみに，社会学者マックス・ウェーバーは，平均律が普及したために「ピアノ」という楽器の大量生産されるようになったとか，あるいは，ピアノの大衆化が平均律を必要としたとかという説を唱えている．

7. まとめ

ドレミ・・・ というディジタル化の理由を考えると，二つ(あるいはそれ以上) の楽器の音を重ねたとき，ひびきの良い周波数比列を選んだことにある．そして，その前提となった楽器は弦楽器と管楽器である．

図15: ガムランの楽器のひとつ，ボナン．

二つ以上の楽音の響き，すなわちハーモニーを重視しなければ，ドレミ・・・ という「しばり」はかなり緩いものになる．日本古来の音楽はハーモニーを重視しない．そのため，音程を微妙に調整して，音楽に細かいニュアンスを加えることを可能としているということもできる．

また弦楽器・管楽器以外の楽器を用いる民族音楽では，西洋音楽とは異なる音階が存在する．図 15 はガムランで用いられる楽器のひとつ，ボナンである．個々の鍋のようなものが個々の音高を持っている．その振動は図 3 とは全く異なるし，スペクトルは図2 のような規則性はない．このような楽器で西欧音楽のドレミ・・・に基づく音楽を演奏する必然性はない．

参考文献

小方　厚「音律と音階の科学」講談社ブルーバックス (2007)．

附録

TSS 文化大学の講義で用いたパワーポイントの一部を pdf 化して添付しました．

・ 最新のAdobe Reader でご覧下さい．

・ 音声ファイルがありますので，オーディオのボリュームを調整して下さい．

・ 横三角をクリックすると，オーディオあるいはビデオが始まります.

・ html アドレスをクリックすると YouTube の画面が別ウィンドウで開く部分がありますので，Internet につないだ状態でご覧下さい．接続状態によっては動画が中断する場合があります.

（本稿は、2012 年 3 月 13 日にＴＳＳ文化大学で行った講演の概要である。）